

# 一种考虑二阶径向畸变的主动视觉自标定算法

袁 野<sup>1),2)</sup> 欧宗瑛<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(大连理工大学自动化系, 大连 116024) <sup>2)</sup>(大连理工大学机械系 CAD&CG 研究所, 大连 116024)

**摘 要** 基于主动视觉的摄像机自标定是摄像机标定的一个重要分支, 由于普通的 CCD 摄像机拍摄的像片存在着各种类型的几何畸变, 其中以径向畸变最为严重, 因此研究考虑径向畸变的自标定技术有着重要的意义. 为了标定结果更精确, 提出了一种考虑二阶径向畸变的内参数自标定方法, 并通过推导考虑二阶径向畸变的极线几何约束, 得出了如果能控制摄像机做 4 次不在同一平面上的平移运动, 则可以标定摄像机的内参数和二阶径向畸变系数的结论. 仿真实验结果表明, 该算法精度很高, 且具有一定的鲁棒性, 可用于摄像机的标定.

**关键词** 近景摄影测量(420·2020) 摄像机自标定 主动视觉 二阶径向畸变 极线几何约束 内参数  
**中图分类号**: TP391.41 TP242.62 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2003)03-0347-05

## A Camera Self-calibration Algorithm Based on Active Vision Taking Account of Camera Two-degree Radial Distortion

YUAN Ye<sup>1),2)</sup>, OU Zong-ying<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(Automation Department, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

<sup>2)</sup>(CAD&CG lab, Mechanical Engineering Department, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

**Abstract** Camera self-calibration techniques based on active vision make the calibration simplified, so it is a main branch of camera calibration field. Many kinds of distortions were existed in ordinary camera, among these distortions the radial distortion is more serious, so the study on the self-calibration technique taking account of radial distortion is very important. A camera self-calibration algorithm based on active vision taking account of two-degree radial distortion is proposed in this paper in order to make the calibration result more accurate. The epipolar geometry constraint taking account of two-degree radial distortion is developed. Then the conclusion was drawn that the epipole of the image which is taken after the translation motion is done is still equal to the epipole of the initial position image when the two-degree radial distortion is taken account. The calibration taking account of two-degree radial distortion become a problem to solve complex nonlinear equations. The Levenberg-Marquardt algorithm is used to solve the nonlinear equations. Then the intrinsic parameters and two-degree radial distortion coefficients can be calibrated by controlling the camera to undergo four translations or more which should not be co-planar. Experiments results show that the accuracy of the algorithm is high and the robustness of the algorithm is strong. So this algorithm is feasible.

**Keywords** Camera self-calibration, Active vision, Two-degree radial distortion, Epipolar geometry constraint, Intrinsic parameters

## 0 引 言

摄像机标定被认为是实现三维欧氏空间立体视觉基本而又关键的一步. 由于传统的摄像机标定方法需在摄像机前放置一个标定参照物, 因此在每次

参数调节后, 需要重新对摄像机进行标定, 这在危险恶劣环境下, 根本不可能做到, 而基于主动视觉的自标定则不需要已知参照物, 仅通过控制摄像机运动来获得多幅图象, 即可确定内参数, 这就使标定过程大为简化. 目前基于主动视觉的自标定有如下两类: 一类是通过控制摄像机做纯旋转运动来求解内参数

的方法<sup>[1]</sup>,由于在实际应用中,很难做到绕旋转轴做旋转而没有一点平移,因而该方法实现起来很困难;另一类是通过控制摄像机在三维空间做平移运动来求解内参数的方法,其中比较有代表性的是通过控制摄像机做两组平移运动(每组包括3次两两正交的平移运动)来线性求解摄像机4个内参数的方法<sup>[2]</sup>;通过控制摄像机做4组平面正交平移运动来线性求解摄像机的4个内参数的方法<sup>[3]</sup>;还有通过控制摄像机做5组平面正交运动,并利用图象中的极点信息来线性标定5个内参数的方法<sup>[4]</sup>。

由于以上方法都没有考虑到非线性镜头畸变,因此提出了一种新的自标定方法,该方法只需控制摄像机在三维空间做4次不在一个平面上的平移运动(无需正交),即可在摄像机二阶径向畸变模型下,求解出5个内参数和两个径向畸变系数。

## 1 考虑二阶径向畸变的成像模型与极线几何约束

### 1.1 二阶径向畸变模型

由于摄像机光学系统存在加工误差和装配误差,因此物体点在摄像机像面上所成的像与理想成像间存在光学畸变误差,其中主要的畸变有径向畸变、偏心畸变和薄棱镜状畸变,但在工业视觉中,一般只需考虑二阶径向畸变即可。设不考虑畸变的理想成像点的规一化坐标为  $x_n = [X_c/Z_c \ Y_c/Z_c \ 1]^T$ ,有畸变的实际图象像素点的规一化坐标为  $x_d = [x_d \ y_d]^T$ ,则  $x_n$  与  $x_d$  之间的关系如下

$$x_d = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix} = (1+k_1r^2+k_2r^4) \begin{bmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,  $r^2 = (X_c/Z_c)^2 + (Y_c/Z_c)^2$ ,  $\lambda = (1+k_1r^2+k_2r^4)$ ,  $k_1, k_2$  为径向畸变系数。从式(1)可以看出,图象中心点处的畸变很小,而在图象边缘处的畸变则较大。

当考虑畸变后,图象像素点的坐标与考虑畸变的实际成像点的规一化坐标  $x_d$  之间的关系<sup>[5]</sup>为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u & s & u_0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 则图象像素点的坐标与}$$

规一化坐标  $x_n$  之间的关系如下:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \lambda X_c/Z_c \\ \lambda Y_c/Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \Lambda K x_n \quad (2)$$

其中,  $K$  称为内参数矩阵;  $f_u$  为图象  $u$  轴的尺度因子,  $f_v$  为图象  $v$  轴的尺度因子,  $s$  为畸变因子,  $(u_0, v_0)$  为主点坐标;  $\Lambda$  称为畸变系数矩阵:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k_1r^2+k_2r^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k_1r^2+k_2r^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

以上导出了畸变模型,而要求解的则是径向畸变系数  $k_1, k_2$  以及内参数矩阵  $K$ 。

### 1.2 考虑二阶径向畸变的极线几何

在不考虑畸变的情况下,设空间一点  $M$ , 它的实际位置未知,但通过它在第1幅图象上的投影点  $m$ , 就可以得到它在空间中的一条对应射线,这条射线投影到第1幅图象就得到一条线  $l$ , 投影到第2幅图象则得到一条线  $l'$ , 其对应点  $m'$  就在  $l'$  上,这就称为极线几何约束。若由两个投影中心  $o$  和  $o'$  以及  $M$  点确定的平面,其上的所有点在第2幅图象上的投影都  $l'$  在上,在第1幅图象上的投影都在  $l$  上,则  $l$  和  $l'$  称为对应极线。而经过两个投影中心的每个平面产生的一系列对应极线,其所有这些线都经过两个特殊点  $e$  和  $e'$  (极点)。

假定第1个摄像机的坐标系与世界空间坐标系重合,则空间点  $M$  的空间坐标  $X$  为

$$X = \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{c_1} \\ Y_{c_1} \\ Z_{c_1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

设  $m$  为  $M$  点在第1幅图象上的投影齐次坐标,则由式(2)可得如下  $m$  与  $X$  之间的关系

$$m = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \Lambda_1 K x_n \approx \Lambda_1 K X \quad (5)$$

其中,  $\approx$  代表相差一个非零常数因子意义下的相等,  $\Lambda_1$  为  $X$  的畸变系数矩阵。

第2幅图象摄像机坐标系可看成是由第1幅图象摄像机坐标系经旋转与平移后得到的。设空间点  $M$  在第2幅图象摄像机坐标系下的坐标为  $X'$ , 则其三维空间刚体位置变换为

$$X' = R X + T \quad (6)$$

设  $m'$  为  $M$  点在第2幅图象上的投影齐次坐标,则有

$$m' = \Lambda_2 K x'_n \approx \Lambda_2 K X' = \Lambda_2 K R X + \Lambda_2 K T \quad (7)$$

其中,  $\Lambda_2$  为  $X'$  的畸变系数矩阵,  $x'_n$  为  $X'$  的规一化坐标。

由于第2幅图象的极点  $e'$  为第1个摄像机光心

$o$  在第 2 幅图象上的投影, 而  $o$  在第 1 个摄像机坐标系的坐标为  $[0 \ 0 \ 0]^T$ , 所以根据式(6)可得它在第 2 个摄像机坐标系的坐标为  $T$ , 其第 2 幅图象的极点可表示如下

$$e' = \Lambda_2 K t_n \approx \Lambda_2 K T \quad (8)$$

其中,  $T = (t_x, t_y, t_z)^T$ ,  $t_n$  为  $T$  的规一化坐标,  $t_n = (t_x/t_z, t_y/t_z, 1)^T$ .

同理, 由于  $e$  为第 2 个摄像机光心  $o'$  在第 1 幅图象上的投影, 而  $o'$  在第 2 个摄像机坐标系的坐标为  $[0 \ 0 \ 0]^T$ , 所以根据式(6)可得它在第 1 个摄像机坐标系的坐标为  $-R^{-1}T$ , 其第 1 幅图象的极点可表示如下

$$e = \Lambda_1 K R^{-1} t'_n \approx -\Lambda_1 K R^{-1} T \quad (9)$$

其中,  $t'_n$  是  $-T$  的规一化坐标,  $t'_n = (t_x/t_z, t_y/t_z, 1)^T$ , 很显然  $t_n = t'_n$ . 如果经过纯平移运动, 即  $R$  为单位阵, 则式(9)可变为

$$e = \Lambda_1 K t'_n \approx \Lambda_1 K T \quad (10)$$

因  $r_1^2$  和  $r_2^2$  与  $t_n$  和  $t'_n$  有关, 且  $t_n = t'_n$ , 所以  $r_1^2 = r_2^2 = (t_x/t_z)^2 + (t_y/t_z)^2$ , 且  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 由式(3)知, 由于一次纯平移运动得到的两个极点的畸变系数矩阵  $\Lambda_1$  和  $\Lambda_2$  相等, 又由式(8)、式(10)可知, 如  $\Lambda_1$  和  $\Lambda_2$  相等, 则两幅图象的极点相等, 因而考虑径向畸变后, 纯平移运动后得到的两幅图象的极点仍相等, 即

$$e = e' = \Lambda K t_n \quad (11)$$

其中,  $\Lambda = \Lambda_1 = \Lambda_2$ .

## 2 非线性自标定算法

### 2.1 求解极点

求极点的方法采用的是在纯平移运动下的两点算法<sup>[4]</sup>. 但文献[4]没有考虑二阶径向畸变的存在, 如果考虑, 那么在图象的不同地方选取两对对应点, 其得到的极点是不同的, 这是因为不同点的畸变系数矩阵是不同的. 由于图象中心处的畸变很小, 畸变系数矩阵几乎是单位阵, 基于此, 在图象的中心附近选取两对或两对以上对应点可以得到较精确的极点.

### 2.2 求解 5 个内参数及二阶径向畸变系数

在主动视觉系统中, 摄像机固定在一个可精确控制的平台上, 平台的运动参数可以从计算机读出. 由文献[6]可知, 在平台坐标系下, 相对于初始位置的平移向量可以很容易得到. 如果令平台坐标系的坐标轴与摄像机坐标系的坐标轴平行, 并保持摄像

机相对于平台的位姿不变, 那么在摄像机坐标系下的摄像机, 相对于初始位置的平移向量  $T$  也就可以获得.

由式(11)可以看出, 由于经过一次纯平移运动, 平移向量  $T$  已知, 不仅其相应的极点  $e$  可以求得, 而且其畸变系数矩阵  $\Lambda$  中的  $r^2$  和  $r^4$  也可以求得, 因此就可以得到如下关于内参数矩阵  $K$  和二阶径向畸变系数  $k_1, k_2$  的两个非线性约束方程

$$\begin{cases} \lambda_i \left[ \frac{t_x}{t_z} f_u + \frac{t_y}{t_z} s + u_0 \right] = a, \\ \lambda_i \left[ \frac{t_y}{t_z} f_v + v_0 \right] = b, \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $(a, b)$  为第  $i$  次平移运动得到的极点坐标;  $\lambda_i$  是关于  $k_1, k_2$  的方程, 其中有  $k_1, k_2$  以及 5 个内参数共 7 个未知数, 若要求解该方程, 则至少需要 4 次不在一个平面的平移运动  $T_i (i=1, 2, \dots, N \ N \geq 4)$ .

具体求解方法如下, 通过 4 次纯平移运动, 由式(12)可得 8 个非线性方程, 此外,  $\lambda_3$  和  $\lambda_4$  可表示如下

$$\lambda_3 = [r_3^2 \ r_3^4] \begin{bmatrix} r_1^2 & r_1^4 \\ r_2^2 & r_2^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 \\ \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} + 1 \quad (13)$$

$$\lambda_4 = [r_4^2 \ r_4^4] \begin{bmatrix} r_1^2 & r_1^4 \\ r_2^2 & r_2^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 \\ \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} + 1 \quad (14)$$

由式(12)组成的 8 个非线性方程以及式(13)、(14)共组成 10 个非线性方程组, 其中共有 9 个未知数  $f_u, f_v, u_0, v_0, s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , 如果给定一个合理的初值, 那么使用非线性最小二乘法中的 Levenberg-Marquardt 算法, 就可以很容易得到精确解.

已知  $\lambda_1, \lambda_2$  后, 径向畸变系数  $k_1, k_2$  由下式得到

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^2 & r_1^4 \\ r_2^2 & r_2^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 \\ \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

### 2.3 初值的选取

以上的非线性方程组可以转化为非线性最小二乘问题, 且这类问题只有一个全局最小. 如果给定一个接近全局最小的初值, 则可以得到全局最小.

采用一种线性方法来得到一个合理的初值, 这是因为径向畸变系数通常很小, 所以可以令  $k_1, k_2$  的初值均为 0, 即  $\lambda_{10} = \lambda_{20} = \lambda_{30} = \lambda_{40} = 1$ , 此时式(12)可转化为一个未知数为  $f_u, f_v, u_0, v_0, s$  的线性方程组, 然后通过线性最小二乘法就可以得到内参数矩阵的初值  $f_{u0}, f_{v0}, u_{00}, v_{00}, s_0$ . 因为  $f_{u0}, f_{v0}, u_{00}, v_{00}, s_0, \lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}$  是不考虑畸变时的内参数值, 与真

正的解很接近,所以将它作为初值,可以得到全局最小.

2.4 非线性自标定算法

综上所述,非线性摄像机自标定算法如下:

(1) 控制摄像机分别做  $N(N \geq 4)$  次不在一个平面上的已知运动参数的平移运动.

(2) 通过在图象的中心处选取两个或两个以上的图象对应点来计算每次平移运动的极点.

(3) 根据式(12)、(13)、(14)建立非线性方程组.

(4) 采用 Levenberg-Marquardt 算法,求解  $f_v, f_c, u_0, v_0, s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ .

(5) 根据式(15),求解  $k_1, k_2$ .

3 仿真实验与分析

由于缺乏主动视觉控制平台,因而无法用真实图象进行实验,为了验证算法的有效性,故做了如下

的仿真实验:实验所选取的摄像机的理论值为:计算机图象中心坐标为  $u_0 = 320, v_0 = 240, f_u = 1000, f_v = 1000, s = 0, k_1 = -0.14621, k_2 = -1.07258$ ,侧倾角为  $0^\circ$ ,俯仰角为  $0^\circ$ ,旋转角为  $50^\circ$ ,4次平移向量分别为  $T_1 = [10 \ 30 \ 500]^T, T_2 = [10 \ 50 \ 100]^T, T_3 = [10 \ 60 \ 1000]^T, T_4 = [10 \ 50 \ 2000]^T$ .实验时,在每次平移前后,用理论摄像机得到图象中心处的两对对应点,并计算相应的极点.

为了验证本算法的鲁棒性,向得到的极点中加入不同水平的噪声(噪声单位为像素)后再进行标定.噪声水平定义如下,假定正确的极点为  $(a, b)^T$ ,加入噪声水平为  $N$  的噪声以后的极点为  $(a_N, b_N)^T = (a, b)^T + (N \times p_1, N \times p_2)^T$ ,其中  $p_1, p_2$  是在  $(0, 1)$  之间的随机数.表 1、表 2 为标定结果统计表,由表 1、表 2 可以看出,在 5pixels 以内的噪声水平下,标定的摄像机内参数精度很高,说明本算法具有一定的鲁棒性.

表 1 加不同水平的噪声后,得到的解(其中各解均为双精度,为了书写方便,取小数点后 4 位)

噪声	$f_u$	$f_v$	$u_0$	$v_0$	$s$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
-5	999.9997	1000.0067	320.4999	240.4999	0.0068	0.9994	0.9984	0.9944	0.9999
-4	1000.0002	999.9946	319.6001	239.6001	0.0054	0.9940	0.9984	0.9994	0.9999
-3	1000.0002	999.9959	319.7001	239.7001	0.0041	0.9994	0.9984	0.9994	0.9999
-2	1000.0001	999.9973	319.8000	239.8000	0.0027	0.9994	0.9984	0.9994	0.9999
-1	1000.0001	999.9986	319.9000	239.9000	0.0014	0.9994	0.9984	0.9994	0.9999
0	1000.0001	1000.0000	320.0000	240.0000	0.0000	0.9994	0.9984	0.9994	0.9999
1	999.9999	1000.0014	320.0999	240.0999	0.0014	0.9995	0.9984	0.9994	0.9999
2	999.9999	1000.0027	320.1999	240.1999	0.0027	0.9994	0.9985	0.9994	0.9999
3	999.9998	1000.0041	320.2999	240.2999	0.0041	0.9994	0.9984	0.9994	0.9999
4	999.9998	1000.0054	320.3999	240.3999	0.0054	0.9994	0.9984	0.9994	0.9999
5	999.9997	1000.0068	320.4999	240.4999	0.0068	0.9994	0.9984	0.9994	0.9999

表 2 加不同水平的噪声得到的径向畸变系数及绝对误差( $1e-2$  代表每个数乘以 0.01)

噪声	$k_1$	$k_2$	$k_1$ 绝对误差( $1e-4$ )	$k_2$ 绝对误差( $1e-2$ )
-5	-0.14623693534951	-1.06287130036245	0.26935349509566	0.970869963755
-4	-0.14618952186098	-1.08028931066876	0.20478139020258	0.770931066876
-3	-0.14619443411224	-1.07837498733950	0.15565887757973	0.579498733950
-2	-0.14620044587379	-1.07638562733231	0.09554126208677	0.380562733231
-1	-0.14620471188936	-1.07451763930510	0.05288110643820	0.193763930510
0	-0.14621250670760	-1.07240640023791	0.02506707598160	0.017359976209
1	-0.14621631683295	-1.07057212751856	0.06316832950409	0.200787248144
2	-0.14622293756159	-1.06854391440527	0.12937561590154	0.403608559473
3	-0.14622881721539	-1.06656801851105	0.18817215393235	0.601198148895
4	-0.14623256637516	-1.06474097831590	0.22566375163263	0.783902168410
5	-0.14623693534951	-1.06287130036245	0.26935349509566	0.970869963755

## 4 结论

基于主动视觉的考虑二阶径向畸变的摄像机内参数自标定算法,其只需通过4次不共面的纯平移运动,就可以标定摄像机的5个内参数和2个径向畸变系数,而以往的基于主动视觉的自标定方法都没有考虑二阶径向畸变.本算法具有以下几点优点:(1)对平移运动的要求不高,且无需进行几组正交运动,只需进行不在一个平面的4次平移运动即可;(2)因为采用了Levenberg-Marquardt算法,所以得到的解精度较高;(3)模拟实验的结果表明,算法具有一定的鲁棒性.

### 参考文献

- 1 Hartley R I. Estimation of relative camera position for uncalibrated camera[A]. In: Proc. of the ECCV'92[C], Italy, Santa Margherita Ligure. 1992. 379~387.
- 2 Ma S D. A self-calibration technique for active vision system[J]. IEEE Trans. Robotics and Automation, 1996,12(1):114~120.

- 3 杨长汇,江威,胡占义.一种基于主动视觉的摄像机内参数自标定方法[J].计算机学报,1998,21(5):428~435.
- 4 李华,吴福朝,胡占义.一种新的线性摄像机自标定方法[J].计算机学报,2000,23(11):1121~1129.
- 5 Bouquet J Y. Description of the calibration parameters[EB/OL]. <http://newbologna.vision.caltech.edu/bouquetj/calib--doc/htmls/parameters.html>,2001-05-26.
- 6 雷成,吴福朝,胡占义.一种新的基于主动视觉系统的摄像机自标定方法[J].计算机学报,2000,23(11):1130~1136.



**袁野** 1972年生,2002年获大连理工大学机械制造及自动化专业的博士学位,讲师.主要研究方向是计算机视觉和图象处理.

**欧宗璞** 1936年生,博士生导师.主要研究方向是智能CAD、计算机视觉、图象处理.